AL/2018/11/S-I

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2018 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தரப்) பரீட்சை, 2018 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2018

උසස් ගණිතය I
உயர் கணிதம் I
Higher Mathematics I

11 S I

2018.08.29 / 0830 - 1140

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

අමතර කියවීම් කාලය - මිනිත්තු 10 යි
மேலதிக வாசிப்பு நேரம் - 10 நிமிடங்கள்
Additional Reading Time - 10 minutes

අමතර කියවීම් කාලය ප්‍රශ්න පත්‍රය කියවා ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීමටත් පිළිතුරු ලිවීමේදී ප්‍රමුඛත්වය දෙන ප්‍රශ්න සංවිධානය කර ගැනීමටත් යොදාගන්න.

විභාග අංකය							

උපදෙස් :

* මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ;
  A කොටස (ප්‍රශ්න **1 - 10**) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න **11 - 17**).
* **A කොටස:**
  සියලු ම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
* **B කොටස:**
  ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
* නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රය **B කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රයට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
* ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.

පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි.

(11) උසස් ගණිතය I		
කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	
	ප්‍රතිශතය	

I පත්‍රය	
II පත්‍රය	
එකතුව	
අවසාන ලකුණු	

අවසාන ලකුණු

ඉලක්කමෙන්	
අකුරෙන්	

සංකේත අංක

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක		
පරීක්ෂා කළේ:	1	
	2	
අධීක්ෂණය කළේ:		

[දෙවැනි පිටුව බලන්න.

A කොටස

1. සාධකවලට වෙන් කරන්න: $8(a+b+c)^3-(a+b)^3-(b+c)^3-(c+a)^3$.

2. සමහර $k\in\mathbb{Z}$ සඳහා $a=3^k b$ නම් සියලු ධන පරිමේය සංඛ්‍යා කුලකය $\mathbb{Q}^+$ මත R සම්බන්ධයක් aRb මගින් අර්ථ දැක්වේ. R යනු $\mathbb{Q}^+$ මත තුල්‍යතා සම්බන්ධයක් බව පෙන්වා 1 හි තුල්‍යතා පන්තිය ලියා දක්වන්න.

[තුන්වැනි පිටුව බලන්න.

0106

3. $x > 1$ සඳහා $f(x) = (x-1)^2 + 2$ යැයි ගනිමු. f එකට–එක බව හා $f^{-1}(2f(2)) = 3$ බව පෙන්වන්න.

4. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2b & 2c \\ 2a & b-c-a & 2c \\ 2a & 2b & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$ බව පෙන්වන්න.

5. $y^2 = 4ax$ පරාවලයෙහි $(at^2, 2at)$ හා $(aT^2, 2aT)$ ලක්ෂ්‍ය යාකරන ජ්‍යාය $(4a, 0)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යයි. $tT = -4$ බව පෙන්වන්න.

6. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ යනු $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x} & , \ x < 0 \text{ නම්,} \\ p & , \ x = 0 \text{ නම්,} \\ \left(x^2 + q\right)e^{-(x+1)} & , \ x > 0 \text{ නම්,} \end{cases}$

මගින් අර්ථ දැක්වෙන ශ්‍රිතය යැයි ගනිමු. $x = 0$ හි දී f සන්තතික බව දී ඇත. p හා q හි අගයන් සොයන්න.

[පස්වැනි පිටුව බලන්න.

7. $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}}|x-1|$ යැයි ගනිමු. $x = 1$ හි දී $f(x)$ අවකලනය බව පෙන්වා, සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා එහි ව්‍යුත්පන්නය $f'(x)$ ලියා දක්වන්න.

8. විසඳන්න: $\frac{dy}{dx} + 2y \tan x = \sin x$.

9. $T > 0$ යැයි ද f යනු සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x+T) = f(x)$ වන පරිදි $\mathbb{R}$ මත වූ තාත්ත්වික අගයැති සන්තතික ශ්‍රිතයක් යැයි ද ගනිමු. $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx$ බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

10. $r = 2\sin\theta$ හා $r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ වක්‍රවල දළ සටහන් එකම රූපයක ඇඳ ඒවායේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යවල ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2018 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2018 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2018

උසස් ගණිතය I
உயர் கணிதம் I
Higher Mathematics I

11 S I

B කොටස

✻ ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (*a*) X, Y හා Z යනු S සර්වත්‍ර කුලකයක උපකුලක යැයි ගනිමු. ඔබ භාවිත කරන කුලක වීජයෙහි ඕනෑම ප්‍රතිඵලයක් පැහැදිලි ව ප්‍රකාශ කරමින්

(i) $(X-Y)-Z \subseteq X-Z$,

(ii) $(X-Y)-(Y-Z)=X-Y$

බව පෙන්වන්න; මෙහි $X-Y$ යන්න $X-Y=X\cap Y'$ මගින් අර්ථ දැක්වේ.

(*b*) ආපන ශාලාවක සිටින පාරිභෝගිකයන් 100 දෙනකු යොදා ගනිමින් උදේ ආහාරය සඳහා ඉදිආප්ප, ආප්ප හා පාන් අතුරින් ඔවුන් කැමති ආහාරය නිගමනය කිරීමට සමීක්ෂණයක් සිදු කරන ලදී. එම සමීක්ෂණයෙන් පහත දැක්වෙන දත්ත එක්රැස් කරන ලදී.

44 දෙනකු ඉදිආප්පවලට කැමති ය.

15 දෙනකු පාන්වලට **පමණක්** කැමති ය.

10 දෙනකු ඉදිආප්පවලට හා ආප්පවලට කැමති නමුත් පාන්වලට අකමැති ය.

78 දෙනකු පාන්වලට හෝ ආප්පවලට කැමති ය.

12 දෙනකු පාන්වලට හා ආප්පවලට කැමති නමුත් ඉදිආප්පවලට අකමැති ය.

27 දෙනකු වර්ග තුනටම කැමති අතර 19 දෙනකු එකම වර්ගයකටවත් කැමති නැත.

(i) ඉදිආප්පවලට කැමති නමුත් ආප්පවලට අකමැති,

(ii) ආප්පවලට **පමණක්** කැමති,

(iii) ඉදිආප්ප හා පාන්වලට කැමති නමුත් ආප්පවලට අකමැති

පාරිභෝගිකයන්ගේ ගණන සොයන්න.

12. (*a*) a, b හා c යනු $a+b+c=1$ වන පරිදි වූ ධන තාත්ත්වික සංඛ්‍යා යැයි ගනිමු. සමාන්තර මධ්‍යන්‍යය - ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යය අසමානතාව භාවිතයෙන් $\frac{1}{abc} \geq 27$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්,

(i) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 9$ බව හා (ii) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} \geq 27$

බව පෙන්වන්න.

$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \geq 64$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*b*) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ පරිණාමනය මගින් xy-තලයේ ලක්ෂ්‍ය $x'y'$-තලයේ ලක්ෂ්‍ය බවට අනුරූපණය වේ. මෙම පරිණාමනය යටතේ $y=ax+b$ රේඛාව $x'y'$-තලයේ යම් රේඛාවක් මතට අනුරූපණය වේ ද එම රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න; මෙහි a හා b නියත වේ.

$A \equiv (2,3)$ හා $B \equiv (3,2)$ යනු xy-තලයේ ලක්ෂ්‍ය දෙකක් යැයි ගනිමු. $x'y'$-තලයේ යම් රේඛාවක් මතට AB රේඛාව අනුරූපණය වේ ද එම රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

13. ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා **ද මුවාවර් ප්‍රමේයය** ප්‍රකාශ කරන්න.

ද මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන්

(i) ඔත්තේ n සඳහා,

$$\sin n\theta = {}^nC_1 \cos^{n-1}\theta \sin\theta - {}^nC_3 \cos^{n-3}\theta \sin^3\theta + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin^n\theta,$$

(ii) ඉරට්ටේ n සඳහා,

$$\sin n\theta = {}^nC_1 \cos^{n-1}\theta \sin\theta - {}^nC_3 \cos^{n-3}\theta \sin^3\theta + \ldots + (-1)^{\frac{n-2}{2}}\, {}^nC_{n-1} \cos\theta \sin^{n-1}\theta$$

බව පෙන්වන්න.

$\sin\theta \neq 0$ සඳහා $\dfrac{\sin 5\theta - \sin 4\theta}{\sin\theta} = 16\cos^4\theta - 8\cos^3\theta - 12\cos^2\theta + 4\cos\theta + 1$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

$x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$ සමීකරණයෙහි මූල සැලකීමෙන්,

$\cos\dfrac{\pi}{9} + \cos\dfrac{3\pi}{9} + \cos\dfrac{5\pi}{9} + \cos\dfrac{7\pi}{9} = \dfrac{1}{2}$ හා

$\cos\dfrac{\pi}{9} \cdot \cos\dfrac{3\pi}{9} \cdot \cos\dfrac{5\pi}{9} \cdot \cos\dfrac{7\pi}{9} = \dfrac{1}{8}$ බව පෙන්වන්න.

14. (*a*) $y = e^{2x}$ හා $y = 2x - x^2$ වක්‍රවල දළ සටහන් එක ම රූපයක අඳින්න.

ඉහත වක්‍ර දෙකෙන් ද $x = 0$ හා $x = 2$ රේඛාවලින් ද පර්යන්තගත පෙදෙස R යැයි ගනිමු. R හි වර්ගඵලය සොයන්න.

තව ද R පෙදෙස x-අක්ෂය වටා සෘජුකෝණ හතරකින් භ්‍රමණය කිරීමෙන් ජනනය වන ඝනයේ පරිමාව සොයන්න.

(*b*) වක්‍ර කුලයක් $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - x^2}{xy}$ අවකල සමීකරණය සපුරාලයි. $y = vx$ ආදේශ කිරීමෙන් මෙම අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

තව ද මෙම වක්‍ර කුලයෙහි ප්‍රලම්බ පරාවක්‍ර සපුරාලන අවකල සමීකරණය ලබාගෙන එය විසඳන්න.

15. (*a*) $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sqrt{1 - x^2}\, dx$ යැයි ගනිමු.

$I_n = \left(\dfrac{n-1}{n+2}\right) I_{n-2}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\int_0^1 x^4 \sqrt{1 - x^2}\, dx$ හි අගය සොයන්න.

(*b*) e^x හා $\sin x$ හි **මැක්ලෝරින්** ශ්‍රේණි ප්‍රසාරණ ලියා දක්වන්න.

ඒ නයින්, $e^{\sin x}$ හි මැක්ලෝරින් ශ්‍රේණි ප්‍රසාරණය x^4 අඩංගු පදය දක්වා, එයත් ඇතුළත්ව, සොයන්න.

මෙය භාවිතයෙන් $\displaystyle\int_0^1 e^{\sin x}\, dx$ සඳහා ආසන්න අගයක් සොයන්න.

16. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ බහුවලයට $P(a \sec\theta, b\tan\theta)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ස්පර්ශකයේ සමීකරණය සොයන්න.
P හි දී ස්පර්ශකය, බහුවලයේ ප්‍රධාන අක්ෂයෙහි අන්තයන්හි ස්පර්ශක Q හා R හි දී හමු වේ. QR රේඛා ඛණ්ඩය මගින් එක් එක් නාභියෙහි සෘජුකෝණයක් ආපාතනය කරන බව පෙන්වන්න.
S_1 හා S_2 නාභි සහිත $\dfrac{x^2}{9} - y^2 = 1$ බහුවලය මත P ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක $\left(5, \dfrac{4}{3}\right)$ යැයි ගනිමු.
ඉහත දැක්වෙන පරිදි අර්ථ දැක්වෙන Q, R, S_1 හා S_2 ලක්ෂ්‍ය ඒකවෘත්ත බව පෙන්වා, මෙම ලක්ෂ්‍ය හරහා යන වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

17. (*a*) $f(x) = \dfrac{3\cos x - 4\sin x}{4\cos x + 3\sin x + 10}$ යැයි ගනිමු.

(i) $f(x)$ හි වසම ප්‍රකාශ කරන්න.

(ii) $f(x)$ හි උපරිම අගය හා අවම අගය සොයා, මෙම අගයන් ලබාදෙන ලක්ෂ්‍යවල x-ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

(iii) $f(x) = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

(*b*) පහත දැක්වෙන වගුවේ දී ඇති $\ln(1+x^2)$ හි අගයන් සහිත ව **සිම්සන් නීතිය භාවිතයෙන්** $\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx$ සඳහා ආසන්න අගයක් සොයන්න.

x	0	0.25	0.50	0.75	1.0
$\ln(1+x^2)$	0	0.0606	0.2231	0.4463	0.6931

$\int_0^1 \ln\left(\dfrac{1+x^2}{2}\right) dx$ සඳහා ආසන්න අගයක් **අපෝහනය** කරන්න.

***

AL/2018/11/S-II

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2018 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2018 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2018

උසස් ගණිතය II
உயர் கணிதம் II
Higher Mathematics II

11 S II

2018.09.01 / 1300 - 1610

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

අමතර කියවීම් කාලය - මිනිත්තු 10 යි
மேலதிக வாசிப்பு நேரம் - 10 நிமிடங்கள்
Additional Reading Time - 10 minutes

අමතර කියවීම් කාලය ප්‍රශ්න පත්‍රය කියවා ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීමටත් පිළිතුරු ලිවීමේදී ප්‍රමුඛත්වය දෙන ප්‍රශ්න සංවිධානය කර ගැනීමටත් යොදාගන්න.

විභාග අංකය							

උපදෙස් :

* මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ;
  A කොටස (ප්‍රශ්න **1 - 10**) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න **11 - 17**).
* **A කොටස**
  සියලු ම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
* **B කොටස**
  ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
* නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රය **B කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රයට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
* ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.
* සංඛ්‍යාන වගු සපයනු ලැබේ.
* g මගින් ගුරුත්වජ ත්වරණය දැක්වෙයි.

පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි.

(11) උසස් ගණිතය II		
කොටස	**ප්‍රශ්න අංකය**	**ලකුණු**
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	
	ප්‍රතිශතය	

I පත්‍රය	
II පත්‍රය	
එකතුව	
අවසාන ලකුණු	

අවසාන ලකුණු

ඉලක්කමෙන්	
අකුරෙන්	

සංකේත අංක

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක		
පරීක්ෂා කළේ:	1	
	2	
අධීක්ෂණය කළේ:		

[දෙවැනි පිටුව බලන්න.

A කොටස

1. O මූලයක් අනුබද්ධයෙන් A, B හා C ලක්ෂ්‍ය තුනක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $a\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ හා $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ වේ. $\overrightarrow{OA}$ හා $\overrightarrow{OB}$ එකිනෙකට ලම්බ වන පරිදි හා $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{OC}$ වන පරිදි a හා c නියතවල අගයන් සොයන්න. a හා c සඳහා මෙම අගයන් සහිත ව $\overrightarrow{AC}$ දෛශිකය $\overrightarrow{OB}$ දෛශිකයට ලම්බ බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. $\mathbf{F}$ බලයක් විශාලත්වයෙන්, දිශාවෙන් හා ක්‍රියා රේඛාවෙන් $\lambda\overrightarrow{AB}$ මගින් නිරූපණය වේ; මෙහි λ යනු අදිශයක් වන අතර $\overrightarrow{OA} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ හා $\overrightarrow{OB} = \mathbf{k}$ වේ. O මූලය වටා $\mathbf{F}$ හි ඝූර්ණ දෛශිකය $\lambda(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ බව පෙන්වන්න.

තවදුරටත්, $\mathbf{F}$ ඒකක විශාලත්වයකින් යුක්ත වේ නම් λ ට ගත හැකි අගයන් සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. අභ්‍යන්තර අරය a, බාහිර අරය $2a$ හා ඝනත්වය σ වූ ඒකාකාර ඝන ගෝලාකාර කබොලක්, ඝනත්වය ρ වූ සමජාතීය ද්‍රවයක ආංශික වශයෙන් ගිලී ඉපිලේ. $\dfrac{\sigma}{\rho} < \dfrac{8}{7}$ බව පෙන්වා, කබොල ද්‍රවයෙහි සම්පූර්ණයෙන් ගිලී ඉපිලී තිබීමට කබොලෙහි උච්චතම ලක්ෂ්‍යයට ඈඳිය හැකි අංශුවේ අඩුතම බර සොයන්න.

4. කාලය $t=0$ හි දී පිහිටුම් දෛශිකය $a\mathbf{i}$ වන ලක්ෂ්‍යය හරහා යමින්, Oxy-තලයේ චලනය වන ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක t කාලයේ දී රේඛීය ගම්‍යතාව $ma\omega(-\mathbf{i}\sin\omega t + \mathbf{j}\cos\omega t)$ වේ; මෙහි a හා ω ධන නියත වේ. P හි $\mathbf{r}$ පිහිටුම් දෛශිකය $\mathbf{r} = a(\mathbf{i}\cos\omega t + \mathbf{j}\sin\omega t)$ මගින් දෙනු ලබන බවත්, එය මත ක්‍රියාකරන $\mathbf{F}$ බලය, $\mathbf{F} = -m\omega^2\mathbf{r}$ බවත් එහි O මූලය වටා කෝණික ගම්‍යතාව $ma^2\omega\mathbf{k}$ බවත් පෙන්වන්න; මෙහි $\mathbf{k}$ යනු $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$ දෛශිකයයි.

[හතරවැනි පිටුව බලන්න.

5. භ්‍රමණයකින් තොරව සිරස් ව වැටෙන සුමට ඒකාකාර A ගෝලයක්, සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් එල්ලී නිශ්චලව තිබෙන සමාන B ගෝලයක් සමග ගැටේ. ගැටුමට මොහොතකට පෙර A හි වේගය u වන අතර ගෝලවල කේන්ද්‍ර යාකරන රේඛාව සිරස සමග $45°$ ක කෝණයක් සාදයි. ගැටුමෙන් මොහොතකට පසු B හි වේගය $\frac{u}{2}$ වේ. ගෝල දෙක අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න.

6. ස්කන්ධය M හා පැත්තක දිග $2a$ වූ ඒකාකාර සමචතුරස්‍රාකාර $ABCD$ ආස්තරයක් AB ඔස්සේ යන අවල, සුමට තිරස් අක්ෂයක් වටා කුඩා දෝලන සිදු කරයි. AB වටා ආස්තරයේ අවස්ථිති ඝූර්ණය $\frac{4}{3}Ma^2$ බව උපකල්පනය කරමින් කුඩා දෝලනවල කාලාවර්තය $4\pi\sqrt{\frac{a}{3g}}$ බව පෙන්වන්න.

7. මුහුණත් මත $1, 2, 3, 4$ ලකුණු කර ඇති චතුස්තලාකාර දාදු කැටයක් නැඹුරු කර ඇත්තේ එය උඩ දැමූ විට r අංකය ලකුණු කරන ලද මුහුණත පහළට ඇතිව පතිත වීමේ සම්භාවිතාව pr වන පරිදි ය; මෙහි p ධන නියතයක් වන අතර $r = 1, 2, 3, 4$ වේ. X යනු "දාදු කැටයේ පහළට ඇති මුහුණතේ ලකුණු කරන ලද අංකය" ලෙස අර්ථ දැක්වෙන සසම්භාවී විචල්‍යය යැයි ගනිමු. $p = \frac{1}{10}$ බව පෙන්වා, X හි අපේක්ෂාව සොයන්න. $Var(X) = 1$ බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

8. නොනැඹුරු කාසියක් 8 වරක් උඩ දමනු ලැබේ. අගයන් ගණනට වඩා වැඩියෙන් ශීර්ෂ ගණනක් ලැබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

9. X සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයක $f(x)$ සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3k}\,x(k-x)\ , & 0\le x\le k \ \text{ සඳහා}\\ 0\ , & \text{අනෙක් විට}\end{cases}$$

මගින් දෙනු ලැබේ; මෙහි k යනු නියතයකි. $k=3$ බව පෙන්වා X හි අපේක්ෂාව සොයන්න.

10. X සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයක $F(x)$ සමුච්චිත ව්‍යාප්ති ශ්‍රිතය

$$F(x)=\begin{cases}0\ , & x<0 \ \text{ නම්,}\\ kx(4-x)\ , & 0\le x\le 1 \ \text{ නම්,}\\ 1\ , & x>1 \ \text{ නම්,}\end{cases}$$

මගින් දෙනු ලැබේ; මෙහි k යනු නියතයකි.

(i) k හි අගය,

(ii) $P\left(X<\frac{1}{4}\right)$ හා

(iii) $P\left(\frac{1}{4}<X<\frac{1}{2}\right)$

සොයන්න.

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2018 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2018 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2018

උසස් ගණිතය II
உயர் கணிதம் II
Higher Mathematics II

11 S II

B කොටස

* ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. O මූලය අනුබද්ධයෙන් $\mathbf{r}_s$ පිහිටුම් දෛශික සහිත A_s ලක්ෂ්‍යවල දී $\mathbf{F}_s$ බල ක්‍රියාකරයි; මෙහි $s = 1, 2, \ldots, n$ වේ. මෙම පද්ධතිය O හි දී ක්‍රියාකරන $\mathbf{R} = \sum_{s=1}^{n} \mathbf{F}_s$ තනි බලයක් සමග ඝූර්ණ දෛශිකය $\mathbf{G} = \sum_{s=1}^{n} \mathbf{r}_s \times \mathbf{F}_s$ වූ යුග්මයකට ඌනනය කළ හැකි බව පෙන්වන්න. පද්ධතිය තනි සම්ප්‍රයුක්ත බලයකට තුල්‍ය වීම සඳහා අවශ්‍යතා ලබාගන්න.

බල හතරකින් සමන්විත පද්ධතියක් පහත දී ඇත.

ක්‍රියා ලක්ෂ්‍යය	පිහිටුම් දෛශිකය	බලය
A	$3\mathbf{i}$	$4\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$
B	$2\mathbf{i}-2\mathbf{k}$	$3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$
C	$-5\mathbf{i}+11\mathbf{j}$	$2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$
D	$\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$	$3\mathbf{i}+7\mathbf{j}+5\mathbf{k}$

මෙම පද්ධතිය O මූලයෙහි දී $\mathbf{R}$ තනි බලයක් සමග ඝූර්ණ දෛශිකය $\mathbf{G} = 4\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ වූ යුග්මයකට ඌනනය වන බව පෙන්වා $\mathbf{R}$ සොයන්න.

ඒ නයින්, පද්ධතිය විශාලත්වය $4\sqrt{22}$ වූ තනි සම්ප්‍රයුක්ත බලයකට තුල්‍ය වන බව පෙන්වන්න.
මෙම සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ ක්‍රියා රේඛාවේ දෛශික සමීකරණයක්, මෙම රේඛාව මත පිහිටන ලක්ෂ්‍යයක පිහිටුම් දෛශිකය දක්වමින්, ලබාගන්න.

12. අරය a වූ වෘත්තාකාර ආස්තරයක් එහි O කේන්ද්‍රය ද්‍රව පෘෂ්ඨයේ සිට a ගැඹුරකින් පිහිටන පරිදි ρ නියත ඝනත්වයක් සහිත ද්‍රවයක සිරස් ලෙස ගිල්වා ඇත.

(i) ආස්තරය මත ද්‍රව තෙරපුමෙහි විශාලත්වය $\pi a^3 \rho g$ බවත්,

(ii) ආස්තරයේ පීඩන කේන්ද්‍රය එහි සිරස් විෂ්කම්භය මත O කේන්ද්‍රයට $\frac{a}{4}$ දුරක් පහළින් පිහිටන බවත්

අනුකලනය මගින් පෙන්වන්න.

අරය a වූ ඝන අර්ධ ගෝලයක් එහි උච්චතම ලක්ෂ්‍යය ද්‍රව පෘෂ්ඨයේ යන්තම් ගැටී තිබෙන පරිදි හා එහි තල මුහුණත සිරස් වන ලෙස, ρ නියත ඝනත්වයක් සහිත ද්‍රවයක ගිල්වා ඇත. අර්ධ ගෝලය මත උඩුකුරු තෙරපුම සොයා තල මුහුණත මත තෙරපුම ලියා දක්වන්න.

ඒ නයින්, අර්ධ ගෝලයෙහි වක්‍ර පෘෂ්ඨය මත තෙරපුමේ විශාලත්වය, දිශාව හා ක්‍රියා රේඛාව සොයන්න.

(අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය එහි සමමිතික අක්ෂය මත, කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{3a}{8}$ දුරකින් පිහිටන බව උපකල්පනය කරන්න.)

[අටවැනි පිටුව බලන්න.

13. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් O මූලයේ සිට $\mathbf{u} = u(\mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\sin\alpha)$ ආරම්භක ප්‍රවේගයකින් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ; මෙහි u හා α නියත වන අතර $\mathbf{i}$ හා $\mathbf{j}$ පිළිවෙළින් තිරස් හා උඩු සිරස් දිශාවලට ඒකක දෛශික වේ.

අංශුවේ ප්‍රවේගය $\mathbf{v}$ වන විට එහි චලිතයට $-mk\mathbf{v}$ ප්‍රතිරෝධ බලයක් ඇත; මෙහි k යනු ධන නියතයකි. අංශුව සඳහා චලිත සමීකරණය $(\ddot{x} + k\dot{x})\mathbf{i} + (\ddot{y} + k\dot{y} + g)\mathbf{j} = \mathbf{0}$ දෛශික ආකාරයෙන් ලබාගන්න; මෙහි $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ යනු t කාලයේ දී අංශුවේ පිහිටුම් දෛශිකයයි.

ඉහත සමීකරණය සඳහා විසඳුම් $x = A + Be^{-kt}$ හා $y = C + De^{-kt} - \frac{g}{k}t$ සංරචක ආකාරයෙන් උපකල්පනය කරමින් A, B, C හා D නියතවල අගයන් u හා α ඇසුරෙන් සොයන්න.

අංශුවට චලනය විය හැකි තිරස් දුරෙහි සීමාකාරී අගය **අපෝහනය** කරන්න.

k නියතය නොගිණිය හැකි නම් අංශුවේ පෙතෙහි කාටීසීය සමීකරණයත් **අපෝහනය** කරන්න.

14. සුපුරුදු අංකනයෙන්, තලයක් මත චලනය වන අංශුවක අරීය හා තීර්යක් ත්වරණ සංරචක, (r, θ) ධ්‍රැවක බණ්ඩාංක මගින්, පිළිවෙළින් $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ හා $\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\theta}\right)$ බව පෙන්වන්න.

සුමට තිරස් මේසයක් මත තබා ඇති ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක්, මේසය මත ඇති O කුඩා සුමට සිදුරක් තුළින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් සමාන Q අංශුවකට ඈඳා, Q අංශුව නිදහසේ එල්ලෙන පරිදි P අල්වා තබනු ලැබේ. ආරම්භයේ දී OP හි දිග a වන අතර, V වේගයෙන් P අංශුව තන්තුවට සෘජුකෝණිව තිරස් ව ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. t කාලයේ දී OP හි දිග $r (\geq a)$ වන අතර OP එහි මුල් පිහිටීමේ සිට θ කෝණයකින් හැරී ඇතැයි සිතමු.

(i) $r^2\dot{\theta} = aV$ හා

(ii) $2\ddot{r} - \frac{a^2V^2}{r^3} + g = 0$

බව පෙන්වන්න.

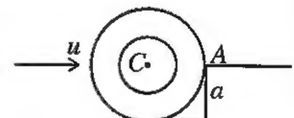
ඒ නයින්, $\dot{r}^2 = \frac{V^2}{2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) - g(r - a)$ බව පෙන්වන්න.

තන්තුවේ දිග $2a$ ට වඩා වැඩි බව දී ඇති විට, $a \leq r \leq 2a$ වන පරිදි මෙම චලිතය සිදු වීම සඳහා $V = \sqrt{\frac{8ga}{3}}$ විය යුතු බවත් පෙන්වන්න.

$r = 2a$ සීමාන්තික පිහිටීමේ දී තන්තුවේ ආතතිය සොයා, මෙම පිහිටීමේ දී Q හි ත්වරණය සිරස් ව පහළට $\frac{2g}{3}$ බව පෙන්වන්න.

15. ස්කන්ධය M හා කේන්ද්‍රය C වූ R රෝදයක් සාදා ඇත්තේ අරය $2a$ වූ ඒකාකාර වෘත්තාකාර තැටියකින් අරය a වූ ඒක කේන්ද්‍රීය වෘත්තාකාර තැටියක් ඉවත් කිරීමෙනි. මෙම R රෝදයෙහි පිටත වෘත්තාකාර දාරයෙහි ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන එහි තලයට ලම්බ අක්ෂයක් වටා අවස්ථිති ඝූර්ණය $\frac{13}{2}Ma^2$ බව පෙන්වන්න. [ස්කන්ධය m හා අරය r වූ ඒකාකාර වෘත්තාකාර තැටියක කේන්ද්‍රය හරහා යන තැටියේ තලයට ලම්බ අක්ෂයක් වටා අවස්ථිති ඝූර්ණය $\frac{1}{2}mr^2$ බව ඔබට උපකල්පනය කළ හැකි ය.]

R රෝදය රළු තිරස් ගෙබිමක් මත ලිස්සීමකින් තොරව පෙරළේ. රෝදයෙහි තලය සිරස් ද ගෙබිම මත උස a වූ සිරස් පඩියකට ලම්බ ද වන අතර C කේන්ද්‍රයේ වේගය පඩිය දෙසට u වේ. (යාබද රූපය බලන්න.)



රෝදය හා පඩිය අතර ගැටුම අප්‍රත්‍යාස්ථ වන අතර ගැටුමට පසු පඩිය සමග ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය වූ A වටා ω කෝණික වේගයකින් රෝදය ස්වකීය තලයේම භ්‍රමණය වීමට පටන් ගනී. $a\omega = \frac{9u}{26}$ බව පෙන්වා ගැටුමෙන් මොහොතකට පසු රෝදයේ ඉතිරිවන චාලක ශක්තිය සොයන්න.

ඒ නයින්, රෝදයට පඩිය උඩට නැගීම සඳහා $u \geq \frac{4}{9}\sqrt{13ga}$ විය යුතු බව පෙන්වන්න.

16. (a) ගොඩනැගිල්ලක පිවිසුමෙහි රාජකාරියෙහි නියුතු මුර භටයා ළඟ සර්වසම ලෙස පෙනෙන යතුරු n ගණනක් ඇති අතර ඉන් එකකින් පමණක් ඉදිරිපස දොර ඇරේ. බලයලත් තැනැත්තකුගේ ඉල්ලීමක් මත භටයා එක යතුරකට පසුව තවත් යතුරක් වශයෙන් සසම්භාවීව, ප්‍රතිස්ථාපනයෙන් තොරව තෝරාගෙන දොර ඇරීම සඳහා උත්සාහ කරයි. "දොර ඇරීමට පෙර ඔහු උත්සාහ කරන යතුරු ගණන" සසම්භාවී විචල්‍යය X යැයි ගනිමු.

$r = 1, 2, \ldots, n$ සඳහා $P(X = r) = \frac{1}{n}$ බව පෙන්වන්න. අපේක්ෂිත යතුරු ගණන $E(X)$ සොයා X හි විචලතාව $\frac{n^2 - 1}{12}$ බව පෙන්වන්න.

X හි සම්මත අපගමනය 2 නම්, යතුරු ගණන සොයන්න.

(b) මහන මැෂිමක්, එය මිල දී ගත් පළමු වසර තුළ පිරික්සීම සඳහා නඩත්තු කාර්මික ශිල්පියකු X වාර ගණනක් පැමිණිය යුතු අතර, X

$$P(X = r) = \begin{cases} e^{-\mu} \dfrac{\mu^r}{r!} & , \quad r = 0, 1, 2, \ldots \quad (\mu > 0) \\ 0 & , \quad \text{අනෙක් විට,} \end{cases}$$

ලෙස අර්ථ දැක්වෙන පුවාසොන් ව්‍යාප්තියක් අනුගමනය කරයි.
X හි මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව ප්‍රකාශ කරන්න.

තවදුරටත් $\mu = 4$ බව දී ඇත. පිරික්සුම් වාර 4 කට වඩා අවශ්‍ය වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
පළමු පිරික්සුම ගෙවීමකින් තොරව සිදු කරන අතර පසුව සිදු කරන පිරික්සුම් එක එකක් සඳහා රුපියල් 1000 බැගින් අය කරනු ලැබේ. මිල දී ගත් පළමු අවුරුද්ද තුළ මහන මැෂිමේ මධ්‍යන්‍ය නඩත්තු වියදම සොයන්න.

17. (a) X සසම්භාවී විචල්‍යයක $f(x)$ සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{15} e^{-\frac{x}{15}} & , \quad x \geq 0 \quad \text{නම්,} \\ 0 & , \quad \text{අනෙක් විට,} \end{cases}$$

මගින් දෙනු ලැබේ.

(i) $E(X) = 15$ බව පෙන්වා $Var(X)$ සොයන්න.

(ii) X හි ව්‍යාප්ති ශ්‍රිතය සොයා, **ඒ නයින්** $P(X \geq 20)$ සොයන්න.

(b) කිරි පිටි ඇසුරුම්වල බර, මධ්‍යන්‍යය 405 g හා සම්මත අපගමනය 20 g සහිත ව ප්‍රමත ලෙස ව්‍යාප්තව ඇත.

(i) අහඹු ලෙස තෝරාගත් කිරි පිටි ඇසුරුමක බර 395 g හා 420 g අතර තිබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(ii) කිරි පිටි ඇසුරුම් පහක් අහඹු ලෙස තෝරාගනු ලැබේ. මෙම ඇසුරුම්වලින් අඩුතරමින් දෙකක බර 395 g හා 420 g අතර තිබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

* * *